

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Persamaan *Navier-Stokes*, *Stream-Function*, dan *Vorticity*

Berdasarkan penyederhanaan persamaan pergerakan fluida yang menunjukkan gaya *body* dan permukaan elemen volume fluida dengan persamaan kontinuitas fluida tak termampatkan, maka didapatkan persamaan *Navier-Stokes*. Persamaan *Navier-Stokes* merupakan sistem PDP yang menggambarkan pergerakan fluida viskos. Dalam koordinat kartesian dua dimensi, persamaan *Navier-Stokes* ditunjukkan pada persamaan (1a – 1b)

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \rho g_x \dots\dots\dots (1a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g_y \dots\dots\dots (1b)$$

Jika kecepatan aliran fluida dilambangkan sebagai \mathbf{V} dengan $\mathbf{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$. Maka *stream function* $\psi(x, y)$ yang menggambarkan relasi kecepatan u dan v ditunjukkan pada persamaan (2).

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \dots\dots\dots (2)$$

Dengan menggunakan definisi *stream function*, persamaan kontinuitas fluida tak termampatkan selalu terpenuhi.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

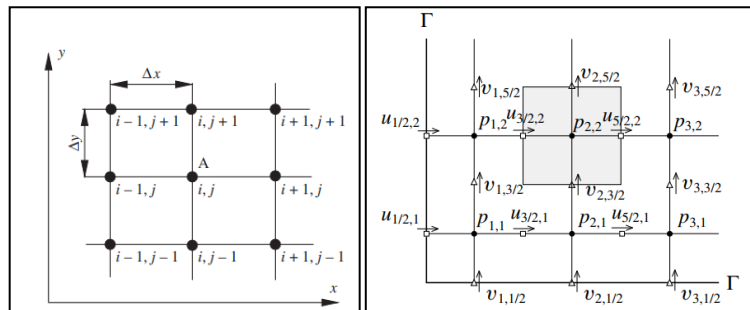
Pada aliran viskos, fenomena rotasi (*rotational*) pada aliran fluida tidak bisa diabaikan sehingga persamaan vektor *vorticity* $\boldsymbol{\omega}$ memiliki definisi dua kali dari vektor rotasi

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\nabla^2 \psi \dots\dots\dots (4)$$

Pengubahan bentuk persamaan (1a – 1b) menjadi *stream-function vorticity* memberikan keuntungan dari segi kemudahan dalam pemecahan masalah menggunakan metode numerik dalam bentuk dua dimensi. Dengan bentuk tersebut, *regular grid* dapat digunakan dan tidak perlu menyelesaikan gradien tekanan. Gambar 2.1 menunjukkan perbedaan antara *regular grid* dengan *staggered grid*.

Pengubahan bentuk persamaan *Navier-Stokes* ke dalam bentuk *stream-function vorticity* dilakukan dengan mengeleminasi persamaan (1a) dan (1b) serta melakukan substitusi persamaan (4) sehingga menghasilkan persamaan (5) dengan ν adalah viskositas kinematik.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = -\left(u \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x} + v \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial y}\right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial y^2}\right) \dots\dots\dots (5)$$



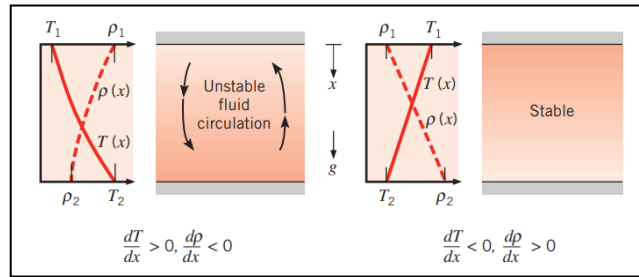
Gambar 2.1. (Kiri) *Collocated grid / Regular grid* dengan seluruh data berada di satu titik (Cuplikan layar dari Zikanov^[1]). (Kanan) *Staggered grid* dengan data tekanan, kecepatan arah x, dan kecepatan arah y terpisah (Cuplikan layar dari Kundu dkk^[19]).

2.2. Konveksi Alami

2.2.1. Definisi dan Fenomena Fisika Konveksi Alami

Perpindahan panas akibat pergerakan fluida dibagi menjadi dua jenis, yaitu konveksi alami dan konveksi paksa. Konveksi alami merupakan konveksi yang terjadi karena efek *buoyancy*. Efek *buoyancy* tersebut terjadi akibat perubahan densitas partikel fluida, yaitu partikel yang lebih panas akan memiliki densitas yang lebih rendah sehingga terangkat ke tingkat permukaan yang lebih tinggi serta *body force* seperti gaya gravitasi. Sedangkan konveksi paksa merupakan perpindahan panas yang disebabkan oleh aliran fluida yang terbentuk dari gaya eksternal seperti pompa dan kipas^[20].

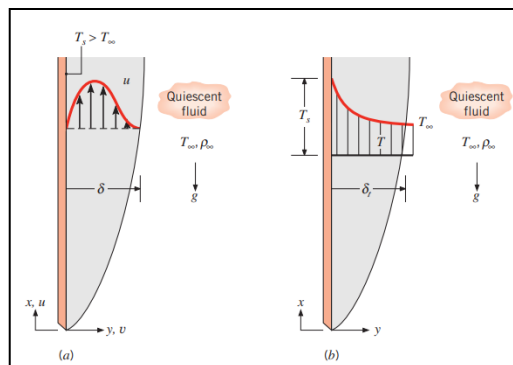
Buoyancy pada konveksi alami menjadi faktor penting yang membentuk aliran suatu fluida. Oleh karena itu, karena densitas berbanding terbalik dengan temperatur, maka semakin tinggi temperatur fluida partikel densitasnya akan semakin rendah ($\frac{\partial \rho}{\partial T} < 0$). Gambar 2.2 merupakan penggambaran kondisi kestabilan fluida ketika berada di antara dua plat horizontal besar yang memiliki perbedaan temperatur. Ketika plat pada sisi bawah T_2 memiliki temperature yang lebih tinggi daripada plat sisi atas T_1 , maka fluida yang berada di dekat plat bawah akan memiliki temperatur yang lebih tinggi sehingga densitas fluida akan lebih kecil daripada posisi fluida di atasnya, sehingga terjadi sirkulasi pergerakan fluida dari posisi dekat plat bawah ke atas. Sedangkan ketika T_2 lebih rendah daripada T_1 , maka tidak terbentuk aliran sirkulasi fluida karena sudah stabil dengan fluida dekat plat sisi atas memiliki densitas yang lebih rendah daripada fluida di dekat plat sisi bawah.



Gambar 2.2. Kondisi fluida diantara dua plat horizontal besar yang memiliki perbedaan temperature (Cuplikan layar dari Incropera dkk^[20]).

2.2.2. Konveksi Alami pada Persamaan *Navier-Stokes* dalam Bentuk *Stream-Function Vorticity*

Jika suatu aliran fluida laminar akibat gaya *buoyancy* adalah dua dimensi, tidak termampatkan, serta gaya gravitasi pada arah negatif x (Gambar 2.3), maka persamaan (1a) dapat disederhanakan dengan menggunakan pendekatan *Boussinesq*. Pendekatan *Boussinesq* menyatakan bahwa perubahan ρ terhadap temperatur, seperti diberikan oleh persamaan (6), hanya terjadi pada gaya *buoyancy* sedangkan pada persamaan inersia tidak berubah.



Gambar 2.3. *Boundary layer* yang terbentuk pada plat vertical yang dipanaskan:

(a) *boundary layer* kecepatan. (b) *boundary layer* termal (Cuplikan layar dari

Incropera dkk^[20]).

$$\rho = \left(\rho_{\infty} + \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_p (T - T_{\infty}) \right) \dots \dots \dots (6)$$

$$\rho_{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left(\rho_{\infty} + \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_p (T - T_{\infty}) \right) g$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{1}{\rho_{\infty}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{\rho_{\infty}} \left(\frac{d\rho}{dT} \right)_p (T - T_{\infty}) \right) g \dots (7)$$

dengan $\frac{\partial p}{\partial x}$ adalah *free stream pressure gradient* di luar *boundary layer*.

Massa jenis pada konveksi alami bergantung kepada perubahan temperatur ($\rho(T)$). Oleh karena itu, densitas tersebut memiliki hubungan pada properti fluida yang disebut β . β menggambarkan bahwa suatu *size* pada objek berubah terhadap temperatur pada tekanan konstan. Jika fluida dalam ruang tertutup diam, maka gradien tekanan lingkungan ruang berlaku persamaan (9).

$$\beta = - \frac{1}{\rho_{\infty}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \text{konstan} \dots \dots \dots (8)$$

$$\nabla p_{\infty} = -\rho_{\infty} g \dots \dots \dots (9)$$

Substitusi ke persamaan (7):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{1}{\rho_{\infty}} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\beta(T - T_{\infty})) g_x \dots (10a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{1}{\rho_{\infty}} \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\beta(T - T_{\infty})) g_y \dots (10b)$$

Dengan $p' = p - p_{\infty}$. Persamaan (10a – 10b) merupakan persamaan momentum arah sumbu x dan arah sumbu y dengan melibatkan pengaruh *buoyancy force* sedangkan persamaan konservasi massa (3) dan energi tidak terpengaruh oleh *buoyancy* seperti berikut:

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \dots \dots \dots (11)$$

Pengubahan persamaan (10a – 10b) dalam bentuk *stream-function vorticity* dua dimensi, dilakukan dengan mengalikan $\frac{\partial}{\partial y}$ pada persamaan (10a) dan $\frac{\partial}{\partial x}$ pada persamaan (10b). Jika diasumsikan arah gravitasi menuju sumbu y negatif, maka $g_x = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (1 - \beta(T - T_\infty))g_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (1 - \beta(T - T_\infty))g_y$$

Kedua persamaan hasil substitusi tersebut saling dieleminasi sehingga didapat persamaan (12).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + g_y \beta \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] + g_y \beta \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial x} \dots \dots \dots (12)$$

Dalam mengubah persamaan (12) dalam bentuk non-dimensional, maka variabel non-dimensional ditunjukkan pada persamaan (13a – 13d).

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L} \dots \dots \dots (13a)$$

$$U = \frac{uL}{\alpha}, V = \frac{vL}{\alpha} \dots \dots \dots (13b)$$

$$\tau = \frac{t\alpha}{L^2}, \Omega = \frac{\omega L^2}{\alpha}, \Psi = \frac{\psi}{\alpha} \dots \dots \dots (13c)$$

$$\theta = \frac{(T - T_\infty)}{(T_h - T_c)} \dots \dots \dots (13d)$$

Variabel non-dimensional tersebut disubstitusikan pada persamaan (12) sehingga menghasilkan persamaan non-dimensional untuk *vorticity* seperti pada persamaan (14).

$$\left(\frac{\alpha^2}{L^4}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \left(\frac{U\alpha^2}{L^4}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial X} + \left(\frac{V\alpha^2}{L^4}\right) \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \nu \left[\left(\frac{\alpha}{L^4}\right) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \left(\frac{\alpha}{L^4}\right) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right] + \frac{1}{L} g\beta \frac{\partial(T-T_\infty)}{\partial X}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = Pr \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right] + Ra \cdot Pr \frac{\partial \theta}{\partial X}, \dots\dots\dots (14)$$

dimana:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \dots\dots\dots (15)$$

$$Ra = \frac{\rho g \beta (T_2 - T_1) L^3}{\mu \alpha} \dots\dots\dots (16)$$

Untuk persamaan non-dimensional *stream function* dan energi ditunjuk pada persamaan (17 – 18).

$$\nabla^2 \Psi = -\Omega \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \nabla^2 \theta \dots\dots\dots (18)$$

2.2.3 Bilangan *Rayleigh*

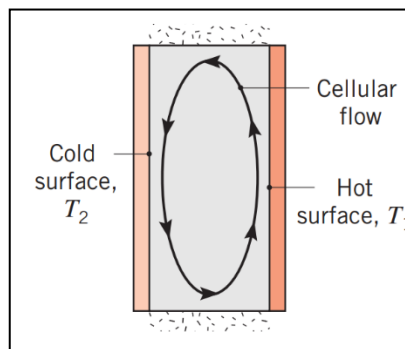
Bilangan *Rayleigh* pada persamaan (16) merupakan hasil kali dari bilangan *Grashof* yang diberikan oleh persamaan (19) dan bilangan *Prandtl* pada persamaan (15) yang menggambarkan *buoyancy driven flow* suatu fluida sehingga dapat menunjukkan karakteristik fluida yang merupakan laminar, transisi, atau turbulen^[21]. Bilangan *Grashof* merupakan pendekatan rasio antara *buoyancy* dengan gaya viskositas pada fluida dan bilangan *Prandtl* merupakan rasio antara difusivitas momentum terhadap difusivitas panas. Dari bilangan *Grashof* dan *Prandtl*, dapat terlihat bahwa semakin besar bilangan *Rayleigh*, maka efek *buoyancy* dan difusi secara momentum akan semakin dominan daripada

karakteristik fluida seperti viskositas sehingga pergerakan fluida dan perpindahan panas secara konveksi natural akan semakin dominan.

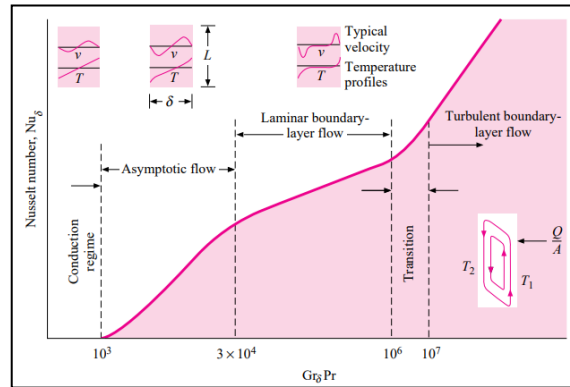
$$Gr = \frac{g\beta(T_{wall}-T_{\infty})L^3}{\nu^2} \dots\dots\dots (19)$$

2.3. Konveksi Alami pada Ruang Tertutup Berbentuk Persegi Panjang

Pada ruang persegi panjang vertikal (Gambar 2.4.) dengan $T_1 > T_2$ dengan T_1 merupakan temperatur pada sisi kanan persegi, T_2 merupakan temperatur sisi kiri, dan sisi atas dan bawah persegi merupakan dinding adiabatik. $Ra < 10^3$, pergerakan fluida akibat *buoyancy* masih rendah sehingga perpindahan panas pada fluida tak termampatkan didominasi oleh konduksi. Semakin besar bilangan *Rayleigh*, maka sirkulasi fluida akan terbentuk dalam ruang tertutup hingga pada bilangan *Rayleigh* tinggi, sirkulasi tersebut akan terpecah membentuk berbagai pola hingga menjadi *turbulent*.



Gambar 2.4. Model skematik ruang tertutup vertikal dengan sisi kiri merupakan T_1 dan sisi kanan T_2 dengan $T_1 > T_2$ dan sisi atas dan bawah *cavity* merupakan dinding adiabatik (Cuplikan layar dari Incropera dkk^[20])



Gambar 2.5. Pengaruh besar bilangan *Rayleigh* terhadap jenis aliran fluida (Cuplikan layar dari Holman^[21]).

Kuantisasi dominasi konveksi atau konduksi yang terjadi pada fluida dalam ruang tertutup digambarkan dengan bilangan *Nusselt* (Nu). Nu merupakan bilangan non-dimensional perbandingan antara transfer panas konveksi terhadap konduksi.

$$Nu = \frac{hL}{k},$$

dengan k adalah koefisien konduktivitas dan h adalah koefisien konveksi.

2.4. State of The Art

Yikun Wei dkk ^[22] melakukan komputasi numerik dengan metode LBM pada bilangan *Rayleigh* antara 10^5 hingga 10^9 . Pada penelitian tersebut, ditunjukkan bahwa ketika panjang non-dimensional $1/5$ dan *Rayleigh* pada 10^8 , aliran fluida pada ruang tertutup berada pada konveksi *soft turbulent*, dan menjadi turbulen seutuhnya ketika bilangan *Rayleigh* 10^9 sehingga semakin tinggi *Rayleigh*, semakin besar mekanisme konveksi natural yang terjadi. Hal serupa juga diteliti oleh Kitamura dkk ^[23] dengan pendekatan eksperimental pada geometri bola panas pada ruang tertutup. Penelitian tersebut mengukur dan mengkorelasikan antara rata-rata bilangan *Nusselt* dengan bilangan *Rayleigh*. Hasil dari penelitian menunjukkan

bahwa ketika bilangan *Rayleigh* melewati batas kritis, maka akan mengalami turbulensi aliran konveksi dengan validasi bilangan *Nusselt* pada penelitian yang pernah dilakukan.

Pengaruh bilangan *Rayleigh* berpengaruh pada jenis aliran fluida pada ruang tertutup, Didier Saury dkk ^[24] secara eksperimental menunjukkan bahwa semakin besar perbedaan temperatur antar dua plat, maka akan memengaruhi besar bilangan *Rayleigh*, menyebabkan kecepatan aliran pada tengah bidang semakin tinggi, dan koefisien gesek pada aliran semakin kecil. Selain itu, variasi viskositas pada aliran juga mempengaruhi kecepatan aliran serta perpindahan panas yang terjadi pada ruang tertutup berdasarkan penelitian J.C. Umavathi ^[14].

Penelitian Wisam K. Hussam dkk ^[25] melakukan simulasi numerik konveksi alami pada kondisi transien pada ruang tertutup berbentuk persegi yang diisi oleh *nanofluid* yang memiliki konduktivitas elektrik. Berbeda dengan penelitian dengan kondisi batas temperatur dinding panas tidak bernilai konstan ^[22-24], melainkan didefinisikan sebagai fungsi periodik. Data grafik isothermal dan *streamline* didokumentasikan dalam satu periodik. Penelitian tersebut tidak menunjukkan alasan diambil data dalam satu periodik sebab terdapat peluang bahwa untuk periodik selanjutnya, pemetaan data isothermal dan *streamline* tidak berperiodik. Penelitian tersebut juga menyatakan bahwa pada bilangan *Rayleigh* rendah, bilangan *Nusselt* tidak dipengaruhi oleh bilangan *Rayleigh*. Tetapi dalam keadaan tunak, bilangan *Nusselt* dipengaruhi oleh bilangan *Rayleigh* ketika nilai *Rayleigh* rendah berdasarkan penelitian Cornelia Revnic dkk ^[15].

Pada aplikasi pendinginan *fin*, bilangan *Rayleigh* menjadi faktor penting dalam performansi pendinginan selain faktor dari posisi *fin*. Penelitian tersebut dilakukan oleh Jia Ma dan Feng Xu ^[26] secara numerik dengan kondisi konveksi alami transien.

Berdasarkan metode-metode dan parameter kondisi yang dilakukan pada penelitian-penelitian terdahulu, baik metode investigasi, jenis fluida, geometri ruang tertutup, kondisi aliran, serta bilangan *Rayleigh* yang diteliti, dilakukan perbandingan metode tersebut pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Perbandingan Metode dan Parameter Kondisi Pada Penelitian-
Penelitian Terdahulu

No	Peneliti	Investigasi	Jenis Fluida	Geometri Plat	Kondisi Aliran	<i>Buoyancy Strength</i>
1	Salva Parvin dan A.J Chamkha ^[13]	Numerik	Air Fluida Nano	Bentuk L	Tunak	$4.10^5 < Ra < 4.10^9$
2	J.C. Umavarhi dan Odolu Ojjela ^[14]	Numerik	Fluida Newtonian	Persegi Panjang	Tunak	$Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$
3	Cornelia Revnic dkk ^[15]	Numerik	Fluida Nano	Persegi Panjang	Tunak	$Gr = 10, 1, 25$
4	Yikun Wei dkk ^[22]	Numerik	Udara	Persegi	Tunak	$10^5 < Ra < 10^9$
5	K. Kitamura dkk ^[23]	Eksperimen	Air, Udara	Bola	Tunak	$5.10^6 < Ra < 4.10^{10}$
6	Jia Ma dan Feng Xu ^[26]	Numerik	Air	Persegi Panjang	Transien	$10^3 < Ra < 10^5$
7	Mikhail A. Sheremet dan Igor V. Miroshnichenko ^[27]	Numerik	Udara	<i>Wave walled</i>	Transien	$10^8 < Ra < 10^{11}$